Формула решения уравнения 4 степени.

Существует несколько методов нахождения корней полиномиального уравнения 4-ой степени.
Однако они не очень удобны при решении уравнений с коэффициентами, которые представляют собой выражения с параметрами.

1. Формула решения уравнения 4 степени.

Рассмотрим уравнение 4-ой степени, сумма корней которого равна нулю.
Коэффициенты могут быть вещественными или комплексными.

$$\mathbf{k0 + k1}\, x + \mathbf{k2}\, x^2 + x^4 = 0$$

Произведение следующих двух квадратов тождественно рассматриваемому уравнению 4-ой степени.

$$\mathrm{new} = \left(-\frac{2\,\mathrm{k1}\,x\left(R\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}-2\,\mathrm{k0}+R^2\right)}{\left(\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}+R\right)\left(R\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}-4\,\mathrm{k0}+R^2\right)}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}+R\right)+x^2\right) *$$
$$\left(\frac{2\,\mathrm{k1}\,x\left(R\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}-2\,\mathrm{k0}+R^2\right)}{\left(\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}+R\right)\left(R\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}-4\,\mathrm{k0}+R^2\right)}+\frac{2\,\mathrm{k0}}{\sqrt{R^2-4\,\mathrm{k0}}+R}+x^2\right)$$

Значение R является решением следующего кубического уравнения.

$$-4\,k0\,k2+4\,k0\,R+k1^2+k2\,R^2-R^3=0$$

Почти такое же уравнение появляется при решении уравнения 4-ой степени путем разложения на разность полных квадратов. Будем называть данное кубическое уравнение вспомогательным.

Вычислим произведение двух квадратов new.

$$\left(8\,x^2\left(-2\,k0^2\,k1^2+18\,k0^2\,R^3+8\,k0^2\,R^2\sqrt{R^2-4\,k0}-8\,k0^3\,R-k1^2\,R^3\sqrt{R^2-4\,k0}+4\,k0\,k1^2\,R^2+2\,k0\,k1^2\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+R^6\sqrt{R^2-4\,k0}-8\,k0\,R^5-6\,k0\,R^4\sqrt{R^2-4\,k0}-k1^2\,R^4+R^7\right)\right)/\left(\left(\sqrt{R^2-4\,k0}+R\right)^2\left(R\sqrt{R^2-4\,k0}-4\,k0+R^2\right)^2\right)+\frac{4\,x\left(4\,k0^2\,k1+k1\,R^3\sqrt{R^2-4\,k0}-5\,k0\,k1\,R^2-3\,k0\,k1\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+k1\,R^4\right)}{\left(\sqrt{R^2-4\,k0}+R\right)^2\left(R\sqrt{R^2-4\,k0}-4\,k0+R^2\right)}+k0+x^4$$

То же самое, но в форме коэффициентов при степенях x (в порядке убывания степеней).

$$\left\{1,\,0,\,\left(8\left(-2\,k0^2\,k1^2+18\,k0^2\,R^3+8\,k0^2\,R^2\sqrt{R^2-4\,k0}-8\,k0^3\,R-k1^2\,R^3\sqrt{R^2-4\,k0}+4\,k0\,k1^2\,R^2+2\,k0\,k1^2\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+R^6\sqrt{R^2-4\,k0}-8\,k0\,R^5-6\,k0\,R^4\sqrt{R^2-4\,k0}-k1^2\,R^4+R^7\right)\right)/\left(\left(\sqrt{R^2-4\,k0}+R\right)^2\left(R\sqrt{R^2-4\,k0}-4\,k0+R^2\right)^2\right),\,\frac{4\left(4\,k0^2\,k1+k1\,R^3\sqrt{R^2-4\,k0}-5\,k0\,k1\,R^2-3\,k0\,k1\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+k1\,R^4\right)}{\left(\sqrt{R^2-4\,k0}+R\right)^2\left(R\sqrt{R^2-4\,k0}-4\,k0+R^2\right)},\,k0\right\}$$

Упростим выражения для коэффициентов при второй и первой степени x.

Приведенное выражение для первой степени x.

$$\frac{4\,k1\left(4\,k0^2+R^3\sqrt{R^2-4\,k0}-5\,k0\,R^2-3\,k0\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+R^4\right)}{4\left(4\,k0^2+R^3\sqrt{R^2-4\,k0}-5\,k0\,R^2-3\,k0\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+R^4\right)}$$

В итоге получаем k1.

Приведенное выражение для второй степени x.

$$\frac{-8\left(2\,k0^2+R^3\sqrt{R^2-4\,k0}-4\,k0\,R^2-2\,k0\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+R^4\right)\left(4\,k0\,R+k1^2-R^3\right)}{-8\left(4\,k0-R^2\right)\left(2\,k0^2+R^3\sqrt{R^2-4\,k0}-4\,k0\,R^2-2\,k0\,R\sqrt{R^2-4\,k0}+R^4\right)}$$

Или

$$\frac{4\,k0\,R+k1^2-R^3}{4\,k0-R^2}$$

Подставив выражение для R^3 получим

$$\frac{\text{k2}\,\left(4\,\text{k0} - R^2\right)}{4\,\text{k0} - R^2}$$

Или k2.

Итак, new тождественно уравнению 4-ой степени, сумма корней которого равна нулю.

Осталась проблема со вспомогательным кубическим уравнением.
Конечно можно использовать традиционные методы решения. Но тогда потребуется преобразовывать уравнение к каноническому виду и отдельно рассматривать три варианта решения в зависимости от значений коэффициентов. Для коэффициентов представляющих из себя выражения с параметрами это не всегда удобно.

2. Решение кубического уравнения методом преобразования Чирнгаузена.

Рассмотрим решение кубического уравнения не очень широко распространенным методом преобразования Чирнгаузена.

Итак, решаем **исходное** уравнение

$$\text{j0} + \text{j1}\,x + \text{j2}\,x^2 + \text{j3}\,x^3 = 0$$

методом Чирнгаузена.

Суть метода заключается в следующих преобразованиях.

1. Вводится уравнение для *y*

$$y = P\,x + Q + x^2$$

2. Обе части равенства из п.1 умножаются на *x*

$$y * x = P\,x^2 + Q\,x + x^3$$

Затем выражение для x^3 заменяется на

$$x^3 \to -\frac{\text{j0}}{\text{j3}} - \frac{\text{j1}\,x}{\text{j3}} - \frac{\text{j2}\,x^2}{\text{j3}}$$

Получается выражение

$$y * x = -\frac{\text{j0}}{\text{j3}} + x\left(-\frac{\text{j1}}{\text{j3}} + Q\right) + x^2\left(P - \frac{\text{j2}}{\text{j3}}\right)$$

В общем описанные в п.2 преобразования не являются тождественными. Но если считать интересными только значения *x*, которые являются корнями исходного уравнения, то данные преобразования можно считать квазитождественными. И тогда *y* представляется выражением, соответствующим корням исходного уравнения.

3. Для кубического уравнения операция в п.2 производится еще один раз. В итоге получается система из 3 уравнений по *x*, которая имеет три ненулевых решения, соответствующих корням исходного уравнения. Из коэффициентов *x* формируем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & P & Q-y \\ P-\frac{j2}{j3} & -\frac{j1}{j3}+Q-y & -\frac{j0}{j3} \\ -\frac{j1}{j3}+\frac{j2^2}{j3^2}-\frac{j2\,P}{j3}+Q-y & -\frac{j0}{j3}+\frac{j1\,j2}{j3^2}-\frac{j1\,P}{j3} & \frac{j0\,j2}{j3^2}-\frac{j0\,P}{j3} \end{pmatrix}$$

4. Находим определитель матрицы, который представляется кубическим выражением по *y*.
Вычисляем значения, обеспечивающие равенство определителя нулю.

$$y\left(P\left(\frac{j0}{j3}-\frac{j1\,j2}{j3^2}+\frac{j1\,P}{j3}\right)-\frac{j2\left(\frac{j0}{j3}-\frac{j1\,j2}{j3^2}+\frac{j1\,P}{j3}\right)}{j3}-\frac{j0\,j2}{j3^2}+\frac{2\,j0\,P}{j3}+\right.$$
$$\left.\frac{j1^2}{j3^2}-\frac{j1\,j2^2}{j3^3}+\frac{j1\,j2\,P}{j3^2}-\frac{4\,j1\,Q}{j3}+\frac{2\,j2^2\,Q}{j3^2}-\frac{2\,j2\,P\,Q}{j3}+3\,Q^2\right)-$$
$$P\,Q\left(\frac{j0}{j3}-\frac{j1\,j2}{j3^2}+\frac{j1\,P}{j3}\right)+\frac{j2\,Q\left(\frac{j0}{j3}-\frac{j1\,j2}{j3^2}+\frac{j1\,P}{j3}\right)}{j3}-\frac{j0\left(\frac{j0}{j3}-\frac{j1\,j2}{j3^2}+\frac{j1\,P}{j3}\right)}{j3}-$$
$$\frac{j1\left(\frac{j0\,j2}{j3^2}-\frac{j0\,P}{j3}\right)}{j3}+\frac{j0\,j1\,P}{j3^2}-\frac{j0\,j2^2\,P}{j3^3}+\frac{j0\,j2\,P^2}{j3^2}-$$
$$P^2\left(\frac{j0\,j2}{j3^2}-\frac{j0\,P}{j3}\right)+Q\left(\frac{j0\,j2}{j3^2}-\frac{j0\,P}{j3}\right)+\frac{j2\,P\left(\frac{j0\,j2}{j3^2}-\frac{j0\,P}{j3}\right)}{j3}-$$
$$\frac{j0\,P\,Q}{j3}-\frac{j1^2\,Q}{j3^2}+y^2\left(\frac{2\,j1}{j3}-\frac{j2^2}{j3^2}+\frac{j2\,P}{j3}-3\,Q\right)+\frac{j1\,j2^2\,Q}{j3^3}-$$
$$\frac{j1\,j2\,P\,Q}{j3^2}+\frac{2\,j1\,Q^2}{j3}-\frac{j2^2\,Q^2}{j3^2}+\frac{j2\,P\,Q^2}{j3}-Q^3+y^3=0$$

5. В уравнении по *y* имеются два параметра *P* и Q. Вычислим их так, чтобы нулю равнялись коэффициенты при второй и первой степени *y*.

$$Q \to \frac{2\,j1\,j3 - j2^2 + j2\,j3\,P}{3\,j3^2}$$

Любое *P*

$$\left\{P \to -\frac{9\,j0\,j3^2 - 7\,j1\,j2\,j3 + 2\,j2^3 + \sqrt{3}\,j3\,\blacksquare}{2\,j3\,(3\,j1\,j3 - j2^2)},\right.$$
$$\left. P \to -\frac{9\,j0\,j3^2 - 7\,j1\,j2\,j3 + 2\,j2^3 - \sqrt{3}\,j3\,\blacksquare}{2\,j3\,(3\,j1\,j3 - j2^2)}\right\}$$

, где

$$\blacksquare = \sqrt{27\,j0^2\,j3^2 - 18\,j0\,j1\,j2\,j3 + 4\,j0\,j2^3 - j1^2\,j2^2 + 4\,j1^3\,j3}$$

6. В итоге имеем уравнение с тремя кратными корнями для *y*

$$\begin{aligned}
y^3 = {} & \big(9720\,j0^2\,j1^2\,j2^2\,j3^3 + 7776\,j0^2\,j1^3\,j3^4 - 5184\,j0^2\,j1\,j2^4\,j3^2 - {} \\
& 2187\,\sqrt{3}\,j0^2\,j1\,j2\,j3^3\,"\blacksquare" - 34\,992\,j0^3\,j1\,j2\,j3^4 + 486\,\sqrt{3}\,j0^2\,j2^3\,j3^2\,"\blacksquare" + {} \\
& 7776\,j0^3\,j2^3\,j3^3 + 576\,j0^2\,j2^6\,j3 + 2187\,\sqrt{3}\,j0^3\,j3^4\,"\blacksquare" + 26\,244\,j0^4\,j3^5 + {} \\
& 405\,\sqrt{3}\,j0\,j1^2\,j2^2\,j3^2\,"\blacksquare" + 2448\,j0\,j1^3\,j2^3\,j3^2 - 288\,j0\,j1^2\,j2^5\,j3 - {} \\
& 5184\,j0\,j1^4\,j2\,j3^3 + 324\,\sqrt{3}\,j0\,j1^3\,j3^3\,"\blacksquare" - 216\,\sqrt{3}\,j0\,j1\,j2^4\,j3\,"\blacksquare" + {} \\
& 24\,\sqrt{3}\,j0\,j2^6\,"\blacksquare" + 27\,\sqrt{3}\,j0\,j3^2\,"\blacksquare"^3 - 288\,j1^5\,j2^2\,j3^2 + {} \\
& 51\,\sqrt{3}\,j1^3\,j2^3\,j3\,"\blacksquare" + 36\,j1^4\,j2^4\,j3 - 6\,\sqrt{3}\,j1^2\,j2^5\,"\blacksquare" - {} \\
& 108\,\sqrt{3}\,j1^4\,j2\,j3^2\,"\blacksquare" + 576\,j1^6\,j3^3 - 9\,\sqrt{3}\,j1\,j2\,j3\,"\blacksquare"^3 + 2\,\sqrt{3}\,j2^3\,"\blacksquare"^3\big) / \\
& (72\,j3^3\,(3\,j1\,j3 - j2^2)^3)
\end{aligned}$$

7. Остается решить квадратное уравнение с известными *y, P, Q*

$$y = P\,x + Q + x^2$$

Одно из решений будет решением исходного уравнения.

3. Параметры решения вспомогательного кубического уравнения.

Для конкретных значений коэффициентов все выглядит не таким страшным образом.
Отметим, что для формулы решения уравнения 4-ой степени требуется только один корень *R* вспомогательного кубического уравнения.

Для конкретных коэффициентов вспомогательного уравнения имеем

$$P \to \frac{8\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k2} - 9\,\mathrm{k1}^2 - 2\,\mathrm{k2}^3 - \sqrt{3}\ \bullet}{2\,(12\,\mathrm{k0} + \mathrm{k2}^2)}$$

$$Q \to \frac{-192\,\mathrm{k0}^2 - 48\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k2}^2 + 9\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2} + \sqrt{3}\ \mathrm{k2}\,\bullet}{6\,(12\,\mathrm{k0} + \mathrm{k2}^2)}$$

$$\boldsymbol{y =} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{\mathbf{2}}\ \mathbf{3}^{2/3}} \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{12\,k0 + k2^2})^3} (-128\,\mathrm{k0}^2\,\mathrm{k2}^2 + 256\,\mathrm{k0}^3 + 144\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2} + 16\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k2}^4 - 4\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2}^3 - 27\,\mathrm{k1}^4) \left(-1152\,\mathrm{k0}^2\,\mathrm{k2}^2 + 2304\,\mathrm{k0}^3 + 1296\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2} + 144\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k2}^4 + 72\ \sqrt{3}\ \mathrm{k0}\,\mathrm{k2}\,\bullet - 36\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2}^3 - 27\ \sqrt{3}\ \mathrm{k1}^2\,\bullet - 243\,\mathrm{k1}^4 - 2\ \sqrt{3}\ \mathrm{k2}^3\,\bullet\right)\right) \text{^}(1/3)\right)$$

$$\bullet = \sqrt{128\,\mathrm{k0}^2\,\mathrm{k2}^2 - 256\,\mathrm{k0}^3 - 144\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2} - 16\,\mathrm{k0}\,\mathrm{k2}^4 + 4\,\mathrm{k1}^2\,\mathrm{k2}^3 + 27\,\mathrm{k1}^4}$$

При использовании формулы решения уравнения 4-ой степени необходимо ссылаться - «Метод ftvmetrics».