Решение уравнения 4 степени.
Феррари vs. ftvmetrics.

Реакция на опубликованную 12 января 2021 на Хабре работу «Формула решения уравнения 4 степени» свидетельствовала о том, что статья была недостаточно хорошо выстроена методически. Формулы не смогли постоять сами за себя.

Попробую исправить ситуацию.

Итак, уравнение 4 степени.

$$u0 + u1\,x + u2\,x^2 + x^4 = 0$$

Сначала о методе Феррари.

Метод Феррари замечателен тем, что он отражает сущность уравнения 4 степени. Выделение полных квадратов приводит к появлению кубической резольвенты. В итоге уравнение можно представить в виде произведения двух квадратных многочленов.
Для уравнения 5 и 6 степени прием, связанный с выделением полных квадратов или кубов, очень быстро заканчивается ничем. Мне кажется, что именно это обстоятельство реально породила тезис о невозможности решения в радикалах уравнений выше 4 степени.

Уравнение резольвенты:

$$-\frac{F^2\,u2}{2}+F^3-F\,u0+\frac{u0\,u2}{2}-\frac{u1^2}{8}=0$$

Произведение двух квадратных многочленов, полученных методом Феррари.

$$\left(\frac{u1}{2\sqrt{2F-u2}}-x\sqrt{2F-u2}+F+x^2\right)*\left(-\frac{u1}{2\sqrt{2F-u2}}+x\sqrt{2F-u2}+F+x^2\right)=F^2-\frac{u1^2}{4\ (2F-u2)}+u1\,x+u2\,x^2+x^4$$

Коэффициенты выражения, стоящего в правой части тождества.

$$\left\{1,\,0,\,u2,\,u1,\,\frac{-4F^2\,u2+8F^3-u1^2}{4(2F-u2)}\right\}$$

Далее подставляем выражение для F^3 из резольвенты и получаем исходный многочлен 4 степени.

$$\left\{1,\,0,\,u2,\,u1,\,\frac{-4F^2\,u2+8F^3-u1^2}{4(2F-u2)}\right\}$$

$$F^3\to\frac{F^2\,u2}{2}+F\,u0-\frac{u0\,u2}{2}+\frac{u1^2}{8}$$

$$\left\{1,\,0,\,u2,\,u1,\,\frac{8\left(\frac{F^2\,u2}{2}+F\,u0-\frac{u0\,u2}{2}+\frac{u1^2}{8}\right)-4F^2\,u2-u1^2}{4(2F-u2)}\right\}$$

$$\{1,\,0,\,u2,\,u1,\,u0\}$$

Единственное, что надо отметить, что резольвента проявляется только при вычислении свободного члена.

Корни одного и того же уравнения должны быть тождественны независимо от того, каким методом получены.
На практике в зависимости от использованного метода получаются корни, о которых в их символическом представлении сложно сказать тождественны они или нет.
Почему бы не иметь еще один метод решения, который в некоторых случаях дает более простые символические представления корней. Такая возможность важна при подборе значений параметров корней и сопряжении корней нескольких уравнений.

Отличия метода ftvmetrics от метода Феррари:

- другие вспомогательные уравнения (резольвенты);
- вспомогательные уравнения «работают» не на свободном члене, а на коэффициентах при первой и второй степенях;

- есть возможность вычисления двух корней уравнения 4 степени из кубического уравнения, представленного в канонической форме.

Первое решение.

Было приведено в поименованной в начале статье.

Вспомогательное уравнением

$$R^2\,\mathrm{u2} + R^3 - 4\,R\,\mathrm{u0} - 4\,\mathrm{u0}\,\mathrm{u2} + \mathrm{u1}^2 = 0$$

Произведение квадратных многочленов, тождественное уравнению 4 степени после неоднократной замены R^3

$$\left(\frac{2\,\mathrm{u1}\,x\left(R\,\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R^2+2\,\mathrm{u0}\right)}{\left(\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R\right)\left(R\,\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R^2+4\,\mathrm{u0}\right)}+\frac{2\,\mathrm{u0}}{\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R}+x^2\right)*\left(-\frac{2\,\mathrm{u1}\,x\left(R\,\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R^2+2\,\mathrm{u0}\right)}{\left(\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R\right)\left(R\,\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R^2+4\,\mathrm{u0}\right)}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R\right)+x^2\right)$$

Вместо решения каждого из квадратных многочленов, указанных выше, в методе ftvmetrics можно найти корни кубического уравнения

$$\frac{2\,\mathrm{u0}\,\mathrm{u1}}{R\,\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R^2+4\,\mathrm{u0}}+\frac{1}{2}\,x\left(-\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}+R+2\,\mathrm{u2}\right)+x^3=0$$

Два из них будут корнями уравнения 4 степени.
При этом появляется возможность выражения корней через экспоненты или тригонометрические функции.

Убедится в корректности альтернативного уравнения можно, вычислив субрезультанты и проверив два первых значения

$$\mathrm{Subresultants}\left[\mathrm{u0}+\mathrm{u1}\,x+\mathrm{u2}\,x^2+x^4,\ \frac{2\,\mathrm{u0}\,\mathrm{u1}}{R\,\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}-R^2+4\,\mathrm{u0}}+\frac{1}{2}\,x\left(-\sqrt{R^2-4\,\mathrm{u0}}+R+2\,\mathrm{u2}\right)+x^3,\ x\right][[1\ ;;\ 2]]$$

```
Expand[Expand[Expand[Expand[Expand[Expand[Numerator[subR[[1]]] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR]
0
```

```
Expand[Expand[Expand[Expand[Expand[Numerator[subR[[2]]] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR] //. fullQR]
0
```

Получаемые выражения субрезультантов «зверские», но когда известно, что ищешь — все не так грустно.

Второе решение.

Вспомогательное уравнение

$$R^3+\frac{1}{3}R\left(-12\,u0-u2^2\right)-\frac{8\,u0\,u2}{3}+u1^2+\frac{2\,u2^3}{27}=0$$

имеет канонический вид.

Произведение квадратных многочленов, тождественное уравнению 4 степени после неоднократной замены R^3

$$\left(\frac{6\,u1\,x\,\left(9\,R^2-6\,R\,u2-3\,R\,\bullet-18\,u0+u2^2+u2\,\bullet\right)}{(-3\,R+u2+\bullet)\,\left(9\,R^2-6\,R\,u2-3\,R\,\bullet-36\,u0+u2^2+u2\,\bullet\right)}+\frac{6\,u0}{-3\,R+u2+\bullet}+x^2\right)*$$
$$\left(-\frac{6\,u1\,x\,\left(9\,R^2-6\,R\,u2-3\,R\,\bullet-18\,u0+u2^2+u2\,\bullet\right)}{(-3\,R+u2+\bullet)\,\left(9\,R^2-6\,R\,u2-3\,R\,\bullet-36\,u0+u2^2+u2\,\bullet\right)}+\frac{1}{6}\,(-3\,R+u2+\bullet)+x^2\right)$$

Корректность альтернативного уравнения также проверяется через субрезультанты

$$\frac{18\,u0\,u1}{-9\,R^2+6\,R\,u2+3\,R\,\bullet+36\,u0-u2^2-u2\,\bullet}+\frac{1}{6}\,x\,(3\,R+5\,u2-\bullet)+x^3=0$$

$$\bullet\to\sqrt{9\,R^2-6\,R\,u2-36\,u0+u2^2}$$

Во втором решении вспомогательное и альтернативное уравнения имеют каноническое представление.

Любопытно получить нечто новое спустя 400 лет.